Title	Choquet 積分におけるHardy-Littlewood 極大不等式 (函数解析学による一般化エントロピーの新展開)
Author(s)	成川, 康男
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1852: 83-95
Issue Date	2013-09
URL	http://hdl.handle.net/2433/195156
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1852巻 2013年 83-95

Choquet積分における Hardy-Littlewood 極大不等式

桐朋学園/ 東京工業大学・総合理工学研究科

成川康男 (Yasuo NARUKAWA)

Toho gakuen / Dept. Comp. Intell. & Syst. Sci., Tokyo Inst. Tech.

1 はじめに

Choquet は容量の理論 [2] で容量の一般化として、コンパクトな台を持つ連続関数上の汎関数である Choquet 積分を定義した。その後、非加法的集合関数に関する積分として, 菅野の積分 [22] とともに意識され, 経済や工学の分野で発展してきた [11, 20, 21]。

1990年代になると Denneberg や Pap の専門書 [3, 19] も刊行され、その研究は深みを増してきた。2000年代には、いくつかの情報源からの情報を総合する関数である aggregation operator の研究が盛んになってきた。そのなかでも、Choquet 積分は、算術平均の一般化であるばかりでなく the weighted mean, the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator [26, 27, 28] などといわれる特殊なものの一般化となっている。aggregation operator については、いくつかの専門書にその成果がまとめられている [6, 1, 25, 7]。

上述のように研究が進められてきた非加法的測度に関する Choquet 積分であるが、その研究の多くは離散的な空間に限定されるか [5, 4, 10]、あるいは抽象的な空間で議論されるか [24, 12] であり、その間にあると考えられる実軸上の Choquet 積分の具体的な計算とその理論に関しては発展途上である [14, 15, 16, 23]。実軸上の非加法的測度 (ファジィ測度) を考察する際、非可算集合上の集合関数であるから、その具体的計算をすることができるのは Lebesgue 測度を歪めたもの (Distorted Lebesgue measure) が中心となる。本

稿では、実軸上の Distorted Lebesgue に関する Choquet 積分の研究をさらに進め、ある条件のもとで、Hardy-Littlewood の極大不等式の成立を論じる。

本稿の構成は以下のとおりである。

第2章で、基本的なファジィ測度 (非加法的測度) と Choquet 積分の基本的な定義と性質を確認し、第3章では、Distorted Lebesgue に関する Choquet 積分に関する性質を考察し、その計算の方法を示す。第4章では Choquet 積分で成立するいくつかの不等式を示し、最後に極大関数と不等式を考察し、今後の課題を示す。

2 Preliminaries

ここでは、非加法的測度 (ファジイ測度) やそれに関する Choquet 積分に関する基本的な定義・定理を確認する。ここで X は a unit interval $[0,1]$ または閉区間であり、$\mathcal{B}$ はボレル集合のクラスであるとする。また、$(X,\mathcal{B})$ は可測空間であるとする。

定義 2.1. [22] ファジィ測度 (または非加法的測度) μ は実数値集合関数で次の性質を満たすものをいう。$\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$ で

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{B}$ であるとき $\mu(A) \le \mu(B)$.

μ がファジィ測度であるとき、$(X,\mathcal{B},\mu)$ をファジィ測度空間という。

ファジィ測度が上から連続であるとは $A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$ であることをいい、下から連続であるとは $A_n \downarrow A$ ならば $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ であることをいう。上と下から連続であるとき、ファジィ測度は連続であるという。

定義 2.2. $(X,\mathcal{B},\mu)$ をファジイ測度空間とする。

(1) μ が submodular であるとは,

$$\mu(A) + \mu(B) \ge \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

が成り立つときをいう.

(2) μ が supermodular であるとは、

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B).$$

が成り立つときをいう.

次に関数の可測性を定義しておく。

定義 2.3. $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とする。関数 $f : X \to R$ が可測であるとは、全ての $\alpha \in R$ に対して $\{x | f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{B}$ が成り立つことをいう。

ここで、$\mathcal{F}(X)$ は非負可測関数の集合とする。

ここで、可測関数に関する Choquet 積分を定義する。

定義 2.4. [2, 11]

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ をファジイ測度空間とする。

μ に関する $f \in \mathcal{F}(X)$ の Choquet 積分は以下の式で定義される。

$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu_f(r) dr,$$

ここで $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$ であるとする。

$A \subset X$ とするとき、A 上に制限された Choquet 積分は

$$(C) \int_A f d\mu := (C) \int f \cdot 1_A d\mu.$$

で定義される。

次の命題は Choquet 積分の定義から明らかである。

命題 2.5. $(X, \mathcal{B})$ を可測空間として μ と ν を $(X, \mathcal{B})$ 上のファジィ測度とする。a, b を正の実数とするとき $f \in \mathcal{F}(X)$ に対して、

$$(C)\int_A fd(a\mu + b\nu) = a(C)\int_A fd\mu + b(C)\int_A fd\nu$$

for $f \in \mathcal{F}_\mu(X) \cap \mathcal{F}_\nu(X)$.

(注) $f \in \mathcal{F}(X)$ が Choquet 可積分 (積分値が有限値をとる) とすると a, b は負の値をとることにしてもよい。

submodular (a super-modular) であるファジィ測度に関しては、以下の定理が有名である。

定理 2.6. [2, 3, 19] $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とし、μ は $(X, \mathcal{B})$ 上のファジィ測度であり、f, g は非負可測関数とする。

(1) μ が submodular であるなら、

$$(C)\int (f+g)d\mu \leq (C)\int fd\mu + (C)\int gd\mu.$$

が成り立つ。

(2) μsupermodular であるなら、

$$(C)\int (f+g)d\mu \geq (C)\int fd\mu + (C)\int gd\mu.$$

が成り立つ。

3 対称 ファジィ測度 に関する Choquet 積分

以下で実軸上のファジィ測度とその Choquet 積分に関するいくつかの性質を紹介する。とくにここでは、対称ファジィ測度に関する Choquet 積分を考察する。

λ は X 上の Lebesgue 測度であり、

$\mathcal{F}_c(X)$ は X 上の連続関数の集合とする。

対称ファジィ測度は離散の場合が研究されてきた [8, 17] が、ここでは実軸の閉区間上に離散の場合の拡張となるように定義する。

定義 3.1. $(X, \mathcal{B})$ を可測空間とし、μ は $(X, \mathcal{B})$ 上のファジィ測度とする。

μ が対称であるとは $\lambda(A) = \lambda(B)$ ならば $\mu(A) = \mu(B)$ であるときをいう。

μ を $(X, \mathcal{B})$ 上の対称 ファジィ測度とする。ここで、関数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ を $\varphi(x) := \mu([0,x])$ で定義する。

ここで、$x < y$ とすると、$[0,x] \subset [0,y]$ であるから、$\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

$\lambda(A) := x$ となる任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して $\lambda(A) = \lambda([0,x])$ であるから、

$$\mu(A) = \mu([0,x]) = \varphi(x) = \varphi(\lambda(A))$$

である。これより、以下の命題が成り立つ。

命題 3.2. μ は $(X, \mathcal{B})$ 上の対称ファジィ測度とする。

このとき、(広義) 単調増加関数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ で $\mu = \varphi \circ \lambda$ となるものが存在する。

また、μ が連続であるとき φ は連続である。

ここで、上の命題の関数 φ を対称 ファジィ測度 μ の重み関数と呼ぶ。

また、μ が連続であるとき、φ は連続であるから、Weierstrass の近似定理から、φ は多項式で近似できる。すなわち、任意の $\epsilon > 0$ に対して、実数 $a_1, \cdots, a_N$ が存在し、$x \in X$ に対して、$|\varphi(x) - \sum_{k=1}^{N} a_k x^k| < \epsilon$ が成り立つ。

それゆえ、連続な対称ファジィ測度は $\sum_{k=1}^{N} a_k \lambda^k$ の形のファジィ測度で近似できることになる。このことから、Choquet 積分の値も次の命題のように近似できることになる。

命題 3.3. μ は $(X, \mathcal{B})$ 上の連続な対称ファジィ測度であるとする。

任意の$\epsilon > 0$に対して, 実数$a_1, \dots, a_N$が存在し, $f \in \mathcal{F}(X)$に対して

$$|(C)\int f d\mu - \sum_{k=1}^{N} a_k (C)\int f d\lambda^k| < \epsilon.$$

が成り立つ。

例 1. $\mu := \lambda^{1/2}$ すなわち$\varphi(x) = x^{1/2}$とする。このとき、一様に$\varphi_n \to \varphi$となる列φ_nをとることができる。

実際、$\varphi_1(x) = x$,

$\varphi_2(x) = f(\frac{1}{2})_2C_1 x(1-x) + f(1)_2C_2 x^2 = \sqrt{2}x - (\sqrt{2}-1)x^2.$

...

とすればよい。

したがって、

$$(C)\int f d\lambda^{1/2} \approx \sqrt{2}(C)\int f d\lambda - (\sqrt{2}-1)(C)\int f d\lambda^2.$$

さらに、重み関数φは解析的であるとすると、

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

と表すことができる。

したがって、$x \in [0,1]$に対して、

$$(C)\int_{[0,x]} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (C)\int f d\lambda^k$$

が成り立つ。

例 2. $\mu(A) := \log_2(\lambda(A)+1)$ すなわち$\varphi(x) = \log_2(x+1)$であるとする。

$$\varphi(x) = \frac{1}{\log 2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$$

であるから、

$$(C)\int f d\log_2(\lambda+1) = \frac{1}{\log 2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\int f d\lambda^k.$$

n を自然数とする。λ^n に関する Choquet 積分の計算に関しては以下の公式が基本的となる。

定理 3.4. [18] 関数 $f:[0,1]\to R$ は狭義単調増加で $f(0)=0$ を満たし、微分可能であるとする。ここで、関数の列 $\{f_k\}$ を以下のように定義する。

$$f_1=\int_0^x f d\lambda,\ f_{k+1}=\int_0^x f_k d\lambda$$

$x\in[0,1]$, $k=1,2,\ldots.$

このとき、$x\in[0,1]$ に対して、

$$(C)\int_{[0,x]} f d\lambda^n = n!f_n(x)$$

が成り立つ。

例 3. [23]

$0<\alpha<1$ とする。λ^α に関する Choquet 積分を利用して、古典物理の力学の問題を起源とした Abel の積分方程式

$$f(t)=\int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau$$

を

$$\alpha f(t)=(C)\int_{[0,t]} g d\lambda^\alpha$$

と表すことができる 。

4 Choquet 積分の不等式

ここでは、Choquet 積分で成立する基本的な不等式を紹介し、最後に Hardy-Littlewood の極大関数とその不等式が成り立つ条件を考察する。

始めに凸関数の定義を確認しておく。

定義 4.1. φ を閉区間 $[c,d]$ 上の実数値関数とする。関数 φ が凸 (*convex*) であるとは、$x,y\in[c,d]$, $0<\lambda<1$ に対して

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$$

が成り立つときをいう。関数 φ が凹 (*concave*) であるとは $x,y\in[c,d]$, $0<\lambda<1$ に対して

$$\varphi(\lambda x+(1-\lambda)y)\ge\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)$$

が成り立つときをいう。

関数 φ の凹凸と φ によって定められるファジィ測度の間には以下のような関係がある。

命題 4.2. *[19]*

連続関数 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ が凹で $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$ であるとき、ファジィ測度 μ を $\mu:=\varphi\circ\lambda$ で定めると、μ は *submodular* である。

初めに、$(X,\mathcal{B},\mu)$ をファジィ測度空間とし、可測集合 A の定義関数を 1_A とするとき, 非負可測関数 f について $\alpha 1_{f>\alpha}(x)\le f(x)$ $(x\in X)$ が成り立つから、Choquet 積分においても次の Chebychev の不等式が成り立つ。

定理 4.3. $\mu(\{f>\alpha\})\le\dfrac{1}{\alpha}(C)\displaystyle\int fd\mu.$

以下では、$\varphi:[0,1]\to[0,1]$ は凹関数で連続であるものとし $\mu:=\varphi\circ\lambda$ とおく。

定義 4.4. 連続関数 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ が *semi convex* であるとは, $C>0$ が存在し、任意の $x,y\in[0,1]$, $0\le a\le1$ に対して

$$\varphi(ax+(1-a)y)\le C\{(a\varphi(x))+(1-a\varphi(y))\}$$

が成り立つことをいう。

また、連続関数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ が *strongly semi convex* であるとは, $C > 0$ が存在し、任意の $x, y \in [0,1]$, $0 \le a_i \le 1, \sum_i a_i = 1$ に対して

$$\varphi(\sum_i a_i x_i) \le C \sum_i a_i \varphi(x_i).$$

が成り立つことをいう。

連続関数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ は凹で $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ であるとする。このとき、任意の $x \in [0,1]$ に対して $x \le \varphi(x)$ が成り立つ。このことを利用して、下の命題が成り立つ。

命題 4.5. 連続関数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ は凹で $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ であるとする。

もし、$C \ge 1$ である実数 $C > 1$ が存在して、任意の $x \in X$ に対して $\varphi(x) \le Cx$ が成り立つなら, φ は *strongly semi convex* である。

例 4. $\varphi(x) = x(2-x)$ とする。このとき φ は凹である。このとき、$\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ となり、また、$x \le \varphi(x) \le 2x$ が成り立つので、φ は *strongly semi convex* である。

次に、ファジィ測度に関する極大関数を定義しよう。

定義 4.6. μ は $(X, \mathcal{B})$ 上のファジィ測度で、$f \in \mathcal{F}(X)$ とする。

f の μ に関する極大関数 $M_\mu f$ は以下の式で定義される。

$$M_\mu f(x) := \sup_r \frac{1}{\mu([x-r, x+r])} (C) \int_{[x-r,x+r]} f d\mu.$$

μ が通常の測度であるとき、は $M_\mu f$ is Hardy Littlewood の極大関数である。もし、μ が重み関数 φ によって作られ ($\mu = \varphi \circ \lambda$)、$\varphi$ が凹凸に関する条件を満たすとき、定理 2.2, 命題 4.2 などから Hardy Littlewood の極大不等式が成り立つ。

定理 4.7. 連続関数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ は凹で $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ で *strongly semi convex* であるとする。

ファジィ測度を $\mu = \varphi \circ \lambda$ で定めると $f \in \mathcal{F}(X)$ に対して、ある定数 C が存在し、任意の $\alpha > 0$ に対して次の不等式が成り立つ。

$$\mu(\{x | M_\mu f(x) > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}(C) \int f d\mu.$$

5 終わりに

ここでは、歪められた Lebesgue 測度に関する Choquet 積分について、いくつかの結果を示した。ここで得られた極大不等式と Chebychev の不等式から、微分定理が成り立つことが予想される。そのとき、重み関数 φ の満たすべき条件を探るのが当面の課題である。

References

[1] Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (eds.) (2002) Aggregation Operators, Physica-Verlag.

[2] Choquet, G. (1955) Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble.* 5,131-295.

[3] Denneberg, D.(1994) *Non additive measure and integral,* Kluwer Academic Publishers, Dordorecht, 1994.

[4] Faigle,U. Grabisch M. (2011) A discrete Choquet integral for ordered systems Original Research Article Fuzzy Sets and Systems, 168, (1), 3-17.

[5] Gilboa,I. Schmeidler D. (1994) Additive representations of non-additive measures and the Choquet integral, Annals of Operations Research, 52,(1), 43-65.

[6] Grabisch, M., Murofushi, T., Sugeno, M. (eds.) (2000) Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications, Physica-Verlag.

[7] Grabisch,M., Marichal, J.-L., Mesiar, R., Pap.,(2009) Aggregation Functions. Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, No 127.

[8] Miranda, P., Grabisch, M. (2002) p-symmetric fuzzy measures, Proc. of the IPMU 2002 Conference, 545-552, Annecy, France.

[9] Grabisch,M. Labreuche, C. (2010) A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid, Annals of Operations Research, 175, (1), 247-286.

[10] Mesiar,R., Mesiarova-Zemankova,A., Ahmad, K. (2011) Discrete Choquet integral and some of its symmetric extensions, Fuzzy Sets and Systems, 184, (1), 148-155.

[11] Murofushi, T., Sugeno, M. (1989) An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems 29 201-227.

[12] Narukawa.Y, Murofushi. T, Sugeno.M.,(2000) Regular fuzzy measure and representation of comonotonically additive functional, Fuzzy Sets and Systems, 112, (2), 177-186.

[13] Narukawa,Y.(2007) Distances defined by Choquet integral, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, July 24-26,,London, England CD-ROM

[14] Narukawa, Y. Torra,V. (2009) Continuous OWA operator and its calculation, Proc. IFSA-EUSFLAT (ISBN:978-989-95079-6-8), Lisbon, Portugal, 20-24 July, 2009, 1132-1135.

[15] Narukawa,Y. Torra,V. (2009) Aggregation operators on the real line, Proc. 3rd International Workshop on Soft Computing Applications (SOFA 2009) (ISBN: 978-1-4244-5056-5), Szeged, Hungary and Arad, Romania, August 2009, 185-188.

[16] Narukawa,Y. Torra,V. (2010) Choquet Integral on Locally Compact Space: A Survey, Integrated Uncertainty Management and Applications, Advances in Soft Computing, Volume 68, 71-81,

[17] Y. Narukawa, V. Torra, On distorted probabilities and m-separable fuzzy measures, International Journal of Approximate Reasoning, 52, (9), (2011), 1325-1336.

[18] Y. Narukawa, V. Torra and M. Sugeno, Choquet integral of a function on the real line, Annals of Operations Research, in Press.

[19] Pap, E. (1995) *Null-Additive set functions,* Kluwer Academic Publishers, Dordorecht, 1995.

[20] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, *Proceedings of the American Mathematical Society,* 97 , (1986), 253-261.

[21] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica,* 57, (1989), 517-587.

[22] Sugeno, M. (1974) *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology.

[23] Sugeno, M. (2012) A note on derivatives of functions with respect to fuzzy measures, to appear in Fuzzy Sets and Systems.

[24] Sugeno. M., Narukawa.Y., Murofushi.T., (1998) Choquet integral and fuzzy measures on locally compact space, Fuzzy Sets and Systems, 99, (2), 205-211.

[25] Torra, V., Narukawa, Y. (2007) Modeling decisions: information fusion and aggregation operators, Springer.

[26] Yager, R. R. (1988) On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 18 183-190.

[27] Yager, R. R., Filev, D. P. (1994) Parameterized and-like and or-like OWA operators, Int. J. of General Systems 22 297-316.

[28] Yager, R.R. (1993) Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems, 59 125-148.